Si $g = h\,k$, on a $h\,H^2 \supset g\,H^2$ donc $(h\,H^2) \subset V'$

De plus $S((h\,H^2)^{\perp}) \subset (h\,H^2)^{\perp}$ car si $v \in (h\,H^2)^{\perp}$

$$< S\,v, h\,\varphi > = < v, z\,h\,\varphi > = < v, h(z, \varphi) > = 0.$$

Car $z\,\varphi \in H^2$ si $\varphi \in H^2$. Le sous-espace $(h\,H^2)^{\perp}$ réduit S.

Réciproquement, si $S(W') \subset W' \subset V'$, on en déduit que $W \supset V$ où $W' = W^{\perp}$. Or W est T. invariant (car W' est S invariant). Il s'écrit donc (2°/)

$$W = h\,H^2$$

D'où $g\,H^2 \subset h\,H^2$ et $g = h\,k$.

Il est immédiat que si $g(\lambda) = 0$, $g(x) = (x - \lambda)\,k$.

D'où $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de S (conjugués à cause de $T^{\star}$)

▶ 6°/ La série $\sum_{0} c_n\,z^n$ convergeant uniformément sur D et S étant un opérateur borné, on en déduit que $\sum_{0}^{\infty} c_n\,r^n\,\delta^n$ converge en norme.

La convergence faible résulte de

$$\|f(S\,r)\,x\| \leq \|f\|_{H^\infty} \cdot \|S\| \cdot \|x\|$$

borné indépendamment de r ; on utilise ensuite la compacité faible de la boule unité de Hilbert H^2. On a immédiatement

$$\|f(S)\| < \|f\|_{H^\infty}$$

car $\|S\| \leq 1$ puisque $\|T\| = 1$.

Il suffit de voir que $(f.g)(S) = f(S).g(S)$ mais ceci est clair en revenant à la limite faible et au vu de $f(r\,S) = \sum c_n\,r^n\,S^n$.

Le noyau de $f \mapsto f(S)$ contient $\tilde{g}$ par définition de V'. D'autre part, si $\varphi \in$ noyau c'est un multiple dans H^∞ de $\tilde{g}$ car il définit un sous-espace T invariant.

Année 1971

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE BESSEL

ÉNONCÉ

N.B. — *Les différentes parties du problème sont indépendantes dans une large mesure.*

On désigne par P le *demi-plan de Poincaré*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, et par D le *disque unité*, ensemble des nombres complexes de valeur absolue (ou module) strictement inférieure à 1.

Les fonctions considérées sont à valeurs complexes.

I

Le but de la première partie est de rechercher les représentations conformes de P sur lui-même.

1° *Transformation de Cayley*. Démontrer que les conditions $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ sont équivalentes. En déduire que l'application $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ définit une représentation conforme de P sur D; déterminer l'application réciproque.

2° Quelles sont les transformations homographiques $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ qui conservent globalement P? Quel est l'ensemble des images d'un point donné de P par ces transformations?

En déduire, à l'aide de la question 1°, les transformations homographiques qui conservent globalement D.

3° Déterminer les transformations conformes du disque D sur lui-même qui laissent fixe l'origine (on pourra utiliser le lemme de Schwarz sur les fonctions holomorphes dans un disque).

4° Montrer qu'il n'y a pas d'autres représentations conformes de D sur lui-même ou de P sur lui-même que les transformations homographiques déterminées à la question 2°.

Démontrer que les translations réelles $z \longmapsto z+\xi$ (ξ réel), les homothéties $z \longmapsto \eta z$ ($\eta > 0$) et la transformation $z \longmapsto \dfrac{-1}{z}$ engendrent le groupe des représentations conformes de P sur lui-même.

II

On désigne par G le groupe des matrices carrées réelles d'ordre 2 dont le déterminant vaut 1 (groupe hyperbolique); on le fait opérer sur P par $g\,.\,z = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où g est l'élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G et z un élément quelconque de P. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un entier relatif fixé dans la suite de l'étude.

Pour toute fonction φ à valeurs complexes définie dans P et pour tout élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G, on désigne par φ_g la fonction :

$$z \longmapsto \varphi_g(z) = [\mathrm{Am}\,(cz+d)]^{-p}\,\varphi(g\,.\,z)$$

en posant pour tout complexe z non nul $\mathrm{Am}\,z = \dfrac{z}{|z|}$.

1° Démontrer que, quels que soient les éléments g et g' de G et la fonction φ, on a :

$$(\varphi_g)_{g'} = \varphi_{gg'}$$

2° Si φ est une fonction deux fois continûment différentiable *au sens réel* (c'est-à-dire par rapport à $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$) dans P, on définit l'opérateur Ω par $\Omega\varphi = y^2\Delta\varphi - ipy\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien. Démontrer que pour tout $g \in$ G on a $\Omega(\varphi_g) = (\Omega\varphi)_g$ (on démontrera qu'il suffit de vérifier cette relation pour une famille de générateurs de G; on achèvera la démonstration en utilisant les générateurs mis en évidence dans la question I 4° ainsi éventuellement qu'une expression de Ω à l'aide de $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$).

3° Démontrer que, si φ est une fonction propre de Ω, c'est-à-dire s'il existe un nombre complexe λ tel que :

$$(1) \qquad \Omega\varphi = \lambda\varphi \qquad \varphi(z) \neq 0$$

alors, pour tout élément g de G, φ_g est encore fonction propre de Ω avec la même valeur propre λ.

Déterminer, s étant un complexe fixé, les fonctions ω définies dans P qui vérifient :

$$\omega(az+b) = a^s\,\omega(z)$$

quels que soient les nombres réels a et b avec $a > 0$ et $z \in$ P ($a^s = e^{s\,\mathrm{Log}\,a}$ avec $\mathrm{Log}\,a \in \mathbf{R}$). Démontrer que pour tout complexe λ on peut trouver s de manière que ces fonctions ω vérifient l'équation (1).

III

Le but du problème est l'étude des fonctions propres φ de l'opérateur Ω qui vérifient en plus, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $z \in$ P, l'équation fonctionnelle :

$$(2) \qquad \varphi(z+\xi) = e^{i\mu\xi}\,\varphi(z)$$

où μ est un réel donné.

1° A une fonction φ vérifiant (2) on associe la fonction $f : y \longmapsto \varphi(iy)$ définie pour $y > 0$; inversement φ est déterminée par f. Montrer que, pour que φ vérifie l'équation (1), il faut et suffit que f vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on explicitera. Résoudre cette équation dans le cas particulier $\mu = 0$.

2° Dans le cas $\mu \neq 0$ on pose $\gamma(u) = f\left(\dfrac{u}{\mu}\right) = \varphi\left(\dfrac{iu}{\mu}\right)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par γ, et montrer qu'elle se ramène par un changement de variable adéquat à l'équation de Whittaker :

$$\zeta^2\,W''(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2}{4} - k\zeta + m^2 - \frac{1}{4}\right) W(\zeta)$$

avec des valeurs de m et k que l'on calculera en fonction de p et λ.

Démontrer que, pour $p = 0$, $h(u) = u^{-\frac{1}{2}}\gamma(u)$ vérifie l'équation de Bessel modifiée :

$$u^2h'' + uh' - (u^2+n^2)\,h = 0$$

(On précisera la valeur de n).

IV

1° Pour $z \in$ P, on pose :

$$\omega(z) = y^s = e^{s\,\mathrm{Log}\,y} \qquad (\mathrm{Log}\,y \text{ étant réel})$$

$$\psi(z;g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_g(z+\xi)\,e^{-i\mu\xi}\,d\xi \qquad g \in \mathrm{G} \qquad \mu \in \mathbf{R}$$

Soit $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démontrer que, pour s convenablement choisi, l'intégrale définissant $\psi(z; g_0)$ converge dans P. Montrer que $\psi(z; g_0)$ est fonction propre de Ω et satisfait (2).

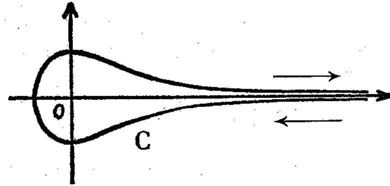
Écrire explicitement l'intégrale donnant $f_0(y) = \psi(iy; g_0)$.

2° Montrer que, si g est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$, alors $\psi(z; g)$ est proportionnel à $\psi(z; g_0)$. Calculer le facteur de proportionnalité (on utilisera la décomposition $g = \sigma g_0 \tau \varepsilon$, ε désignant l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, τ et σ étant deux éléments de G associés respectivement à une translation et à une similitude conservant P).

3° Montrer que, dans le cas $\mu = 0$, $f_0(y)$ est de la forme $A\, y^{1-s}$ où A est une intégrale fonction de s et de p que l'on pourra calculer en se ramenant à une intégrale eulérienne :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{-(\alpha+\beta)}\,dt$$

(On pourra faire le changement de variable d'intégration $\theta = -\dfrac{\xi + iy}{iy}$, et, en notant que dans l'intégrale obtenue on a $|\theta|^2 = -\theta(\theta+2)$, transformer le contour d'intégration d'abord en un contour de Hankel (cf. figure), puis en $]\,0, +\infty\,[$ par un passage à la limite valable moyennant certaines restrictions sur s).



4° Dans le cas général $\mu \neq 0$, expliciter l'intégrale donnant $\gamma_0(u) = f_0\left(\dfrac{u}{\mu}\right)$.

Le changement de variable $v = i\mu\xi - u$ permet de transformer cette intégrale en une intégrale sur un contour C de Hankel, comme à la question précédente. On indiquera des conditions suffisantes pour que cette transformation soit applicable et les valeurs de s pour lesquelles la nouvelle intégrale converge.

En déduire l'expression de f_0 à l'aide de la fonction de Whittaker :

$$(3)\quad W_{k,m}(z) = -\frac{1}{2i\pi}\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}z^k\int_C (-v)^{m-k-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{v}{z}\right)^{m+k-\frac{1}{2}}e^{-v}\,dv$$

Pour $p = 0$, on obtient sous forme intégrale une solution de l'équation de Bessel modifiée.

5° Démontrer que, moyennant une hypothèse convenable sur s, on peut transformer l'intégrale précédente en une intégrale sur $]\,0, +\infty\,[$ comme à la question IV 3°. Expliciter l'intégrale transformée (on rappelle l'égalité $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$).

6° Démontrer que, en prenant une détermination convenable de $(1+x)^{-\alpha}$, qui sera précisée, et α non entier négatif, on a :

$$(1+x)^{-\alpha} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Delta \frac{\Gamma(-u+\alpha)\,\Gamma(u)}{\Gamma(\alpha)}x^{-u}\,du$$

pour $|\arg x| < \pi$ et pour un contour convenable Δ allant de $-\infty i$ à $+\infty i$ (on pourra utiliser un calcul de résidus ou la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier, et la formule asymptotique :

$$\Gamma(z+a) \sim \sqrt{2\pi}\,\exp\left[\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} z - z\right]$$

pour $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ avec $\delta > 0$).

7° Démontrer, à l'aide de la question précédente, que :

$$(4)\quad W_{k,-s+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2i\pi}e^{-\frac{z}{2}}z^k\int_\Delta \frac{\Gamma(s-k-u)\,\Gamma(1-s-k-u)\,\Gamma(u)}{\Gamma(s-k)\,\Gamma(1-s-k)}z^u\,du$$

pour $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$, si $s-k$ et $1-s-k$ ne sont ni l'un ni l'autre des entiers négatifs. En déduire que $W_{k,-s+\frac{1}{2}} = W_{k,s-\frac{1}{2}}$.

8° Démontrer à l'aide de la formule (3) ou de la formule (4) que $W_{k,m}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$e^{-\frac{z}{2}}z^k\left(1+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\alpha_n}{z^n}+r_n\right)$$

où r_n est dominé par $\dfrac{1}{|z|^{n+1}}$ lorsque $|z| \to \infty$, $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$.

9° Démontrer que les fonctions $z \longmapsto W_{k,m}(z)$ et $z \longmapsto W_{-k,m}(-z)$ sont des solutions indépendantes de l'équation de Whittaker. En déduire la solution générale du système des deux équations (1) et (2), ainsi que les solutions de ce système qui sont dominées par une puissance de y lorsque $y \longrightarrow +\infty$.